Université Tunis El Manar
-Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Année universitaire : 2016/2017	Examen Session Principale
Semestre 2	
Module : **Equations Différentielles**	Date : 11/03/17
Enseignant : M. Moakher	Durée : 2h
Classe : **1ère année MIndS**	Documents autorisés (seulement 1 feuille A4 manuscrite) ☑
Barème : Non précisé	Documents non autorisés ☐
Nombre de pages : 2	

Exercice 1

Considérons les deux systèmes dynamiques suivants:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2), \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x(x^2+y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y(x^2+y^2). \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que les deux systèmes admettent l'origine comme unique point d'équilibre.
2. Etudier la stabilité des systèmes linéarisés (autour de l'origine) associés aux systèmes (1) et (2). Que peut-on dire sur la stabilité de l'origine pour les systèmes (1) et (2)?
3. Pour chacun des systèmes (1) et (2), expliciter les équations différentielles vérifiées par (r, θ), les coordonnées polaires définies par $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Donner les solutions maximales de ces équations différentielles et préciser leur durée de vie.
4. Etudier la stabilité de l'origine pour les systèmes (1) et (2).
5. En déduire une fonction de Lyapunov pour (2) à l'origine.
6. Esquisser les portraits de phase pour les deux systèmes (1) et (2).

Exercice 2

1. Soit l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad \text{où} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.a Calculer $A(t)A(s) - A(s)A(t)$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

1.b Calculer l'exponentielle de la matrice $\int_0^t A(s)\,ds$ et monter qu'elle n'est par la résolvante $R_A(t,0)$ de (3).

1.c Donner la solution de (3) avec la condition initiale $x(0) = x_0$. En déduire l'expression de $R_A(t,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$x'(t) = B(t)x(t), \quad \text{où} \quad B(t) = \begin{bmatrix} f(t) & 1 \\ -1 & f(t) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2.a Vérifier que, pour tout $t,\ s \in \mathbb{R}$, $B(t)$ et $B(s)$ commutent.

2.b Posons $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Exprimer $C(t) := \exp\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)$ en fonction de $e^{F(t)}$.

2.c Montrer que $C(t)$ est la résolvante $R_B(t,0)$ de (4).

2.d Montrer que, si $f(t) \leq -a$ pour tout $t > 0$ avec $a > 0$, alors toute solution de (4) tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

3. Expliquer pourquoi $\exp\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)$ est égale à $R_B(t,0)$ alors que $\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$ n'est pas égale à $R_A(t,0)$.